Partie I : Activités numériques (12 points)

Exercice 1 (3 points)

Voici un programme de calcul :

- Prendre un nombre et calculer le produit de ce nombre par 2,5 ;
- Ajouter 18 à ce produit.

1. *Lorsque le nombre de départ est –9, quel résultat obtient-on ?*

$-9 \times 2{,}5 = -22{,}5$ puis $-22{,}5 + 18 = -4{,}5$ On obtient **–4,5**.

2. *Déterminer la fonction p qui correspond à ce programme.*

$p(x) = 2{,}5 \times x + 18$

3. *Déterminer, en détaillant votre méthode, le nombre qui a pour image 153 par la fonction p.*

On cherche x tel que $p(x) = 153$ c'est à dire $2{,}5 \times x + 18 = 153$

$2{,}5 \times x = 153 - 18$

$2{,}5 \times x = 135$

$x = 135 : 2{,}5$

$x = 54$

Le nombre qui a pour image 153 par la fonction *p* est 54.

Exercice 2 (4,5 points)

On donne : D = (3x – 2)(x – 3) + 9x² – 4

1. *Développer et réduire D.*

$D = (3x - 2)(x - 3) + 9x^2 - 4$

$D = 3x \times x - 3x \times 3 - 2 \times x + 2 \times 3 + 9x^2 - 4$

$D = 3x^2 - 9x - 2x + 6 + 9x^2 - 4$

$\mathbf{D = 12x^2 - 11x + 2}$

2. *Factoriser 9x² – 4, puis factoriser D.*

$9x^2 - 4 = (3x)^2 - 2^2 = (3x - 2)(3x + 2)$

$D = (3x - 2)(x - 3) + 9x^2 - 4$

$D = (3x - 2)(x - 3) + (3x - 2)(3x + 2)$

$D = (3x - 2)[(x - 3) + (3x + 2)]$

$D = (3x - 2)[x - 3 + 3x + 2]$

$\mathbf{D = (3x - 2)(4x - 1)}$

3. *Calculer D pour $x = \frac{2}{3}$, puis pour x = –3. Les calculs doivent être détaillés.*

Pour $x = \frac{2}{3}$

$D = (3x - 2)(4x - 1)$

$D = (3 \times \frac{2}{3} - 2)(4 \times \frac{2}{3} - 1)$

$D = (3 - 3)(4 \times \frac{2}{3} - 1)$

$\mathbf{D = 0}$

Pour $x = -3$

$D = 12x^2 - 11x + 2$

$D = 12 \times (-3)^2 - 11 \times (-3) + 2$

$D = 12 \times 9 + 33 + 2$

$D = 108 + 33 + 2$

$\mathbf{D = 143}$

Exercice 3 (4,5 points)

Une enquête, menée par une association d'éditeurs auprès de 998 adultes entre 25 et 40 ans, porte sur le nombre de romans lus pendant l'année 2011. Les résultats de l'enquête sont répertoriés dans le tableau d'effectifs suivant :

Nombre de romans	0	1	2	3	4	5	7	8	9	10	12	15	17	18	21	24	27	31	32	35
Effectifs	136	95	108	104	130	116	64	56	32	44	28	26	20	10	8	8	6	4	2	1
Effectif cumulé	136	231	339	443	573	689	753	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

1. *Déterminer l'étendue de cette série.*

Étendue = 35 – 0 **= 35**

2. *Déterminer la médiane de cette série et interpréter ce résultat.*

L'effectif total est 998. 998 : 2 = 499 Donc la médiane est comprise entre la 499ème donnée et de la 500ème donnée (toutes les deux égales à 4 d'après le tableau des effectifs cumulés. Par conséquent **la médiane est 4**. Ce qui signifie qu'au moins 50 % du groupe d'adultes lit un nombre de romans inférieur ou égal à 4.

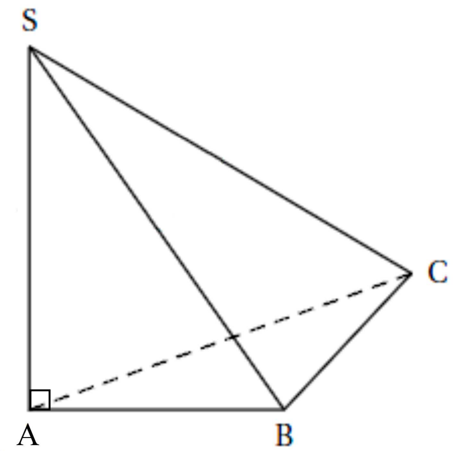
3. *Déterminer le 3ème quartile de cette série et interpréter ce résultat.*

L'effectif total est 998. $(998 : 4) \times 3 = 748{,}5$ Donc le 3ème quartile est la 749ème donnée de la série. Par conséquent **le 3ème quartile est 7**. Ce qui signifie qu'au moins 75 % du groupe d'adultes lit un nombre de romans inférieur ou égal à 7.

Partie II : Activités géométriques (12 points)

Exercice 1 (5 points)

SABC est une pyramide ayant pour base le triangle ABC et pour hauteur SA.
AB = 4,5 cm.
BC = SA = 6 cm.
AC = 7,5 cm.



On rappelle que le volume V *d'une pyramide est donné par la formule :* $V = \frac{1}{3}ah$

où a *est l'aire de la base et* h *la hauteur.*

1. *Démontrer que le triangle ABC est rectangle en B.*

Dans le triangle ABC, le plus grand côté est [AC].

$AC^2 = 7{,}5^2 = 56{,}25$ et $AB^2 + BC^2 = 4{,}5^2 + 6^2 = 20{,}25 + 36 = 56{,}25$

Donc on a : $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

Par conséquent, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, **le triangle ABC est rectangle en B**.

2. *Calculer le volume de la pyramide SABC.*

La base de la pyramide est le triangle ABC. Son aire est égale à $AB \times BC : 2 = 4{,}5 \times 6 : 2 = 13{,}5$.

La hauteur est SA.

Le volume est donc égal à : $\frac{1}{3} \times 13{,}5 \times 6 = 27$.

Finalement **le volume de la pyramide SABC est égal à 27 cm^3**.

3. *On admettra que le triangle BCS est rectangle en B.*

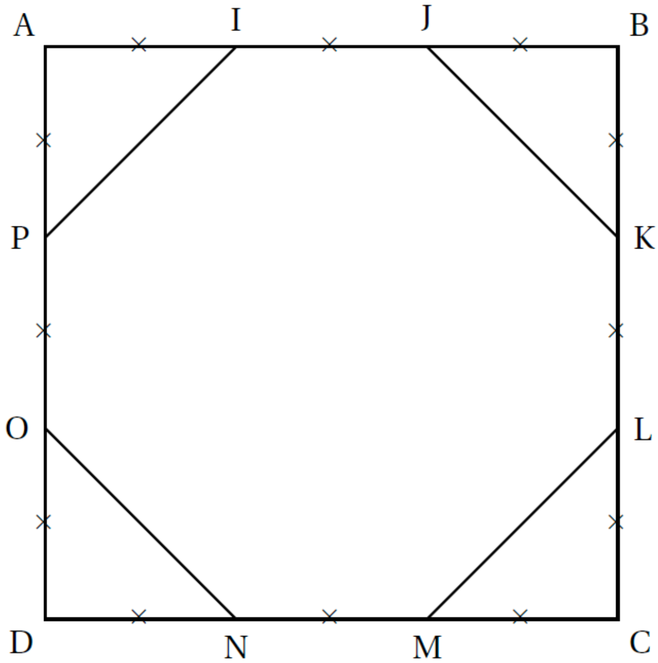
Tracer en vraie grandeur le triangle ABS, puis le triangle BCS.

Figure.

Exercice 2 (7 points)

Dans la figure ci-contre :
- ABCD est un carré de côté 9 cm ;
- les segments de même longueur sont codés.

On donne la définition suivante :
un ***polygone est régulier*** *lorsque tous ses côtés ont la même longueur et que ses angles ont la même mesure.*



1. *Faire une figure en vraie grandeur.*
Figure.

2. *L'octogone IJKLMNOP est-il un octogone régulier ? Justifier la réponse.*
L'octogone IJKLMNOP n'est pas un octogone régulier, car les côtés [JK] et [IJ] n'ont pas même longueur. En effet, le triangle API est rectangle en A. Son plus grand côté est son hypoténuse [PI].
Donc PI > AI Or AI = IJ Donc PI > IJ
Par conséquent les côtés de l'octogone n'ont pas tous la même longueur, donc **IJKLMNOP n'est pas un polygone régulier**.

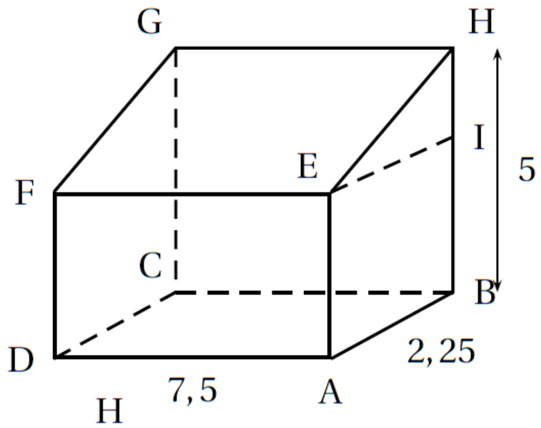
3. *Calculer l'aire de l'octogone IJKLMNOP.*
L'aire de l'octogone IJKLMNOP est égale à l'aire du carré ABCD moins celles des quatre triangles rectangles isocèles égaux AIP, ODN,MCL et KBJ :
$\mathcal{A}$(IJKLMNOP) = $\mathcal{A}$(ABCD) − 4 × $\mathcal{A}$(AIP) = $9^2 - 4 \times 3 \times 3 : 2 = 81 - 18$ **= 63 cm²**.

4. *Les diagonales du carré ABCD se coupent en S.*
a. *Tracer sur la figure en vraie grandeur le cercle de centre S et de diamètre 9 cm.*
Voir figure.

b. *Le disque de centre S et de diamètre 9 cm a-t-il une aire supérieure à l'aire de l'octogone ? Justifier la réponse.*
Aire du disque D de centre S et de diamètre 9 cm (rayon 4,5 cm) : $\mathcal{A}(D) = \pi \times 4{,}5^2 \approx 63{,}6$ cm².

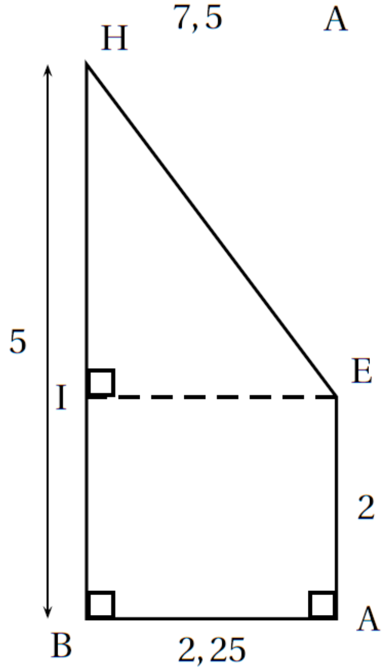
Donc **le disque D a une aire supérieure à celle de l'octogone**.

Partie III : Problème (12 points)



Dans le jardin de sa nouvelle maison, M. Durand a construit une terrasse rectangulaire qu'il désire recouvrir d'un toit. Pour cela, il réalise le croquis suivant où l'unité de longueur est le mètre.

- Le sol ABCD et le toit EFGH sont des rectangles.
- Le triangle HIE est rectangle en I.
- Le quadrilatère IEAB est un rectangle.
- La hauteur du sol au sommet du toit est HB.
On donne : AB = 2,25 ; AD = 7,5 ; HB = 5.



Partie 1

On suppose dans cette partie que AE = 2.

1. *Justifier que HI = 3.*

ABIE est un rectangle donc : IB = EA = 2
Comme le point I est un point du segment [HB], on a : HI = HB – IB
On a donc : HI = 5 – 2 **HI = 3**

2. *Démontrer que HE = 3,75.*

ABIE est un rectangle donc IE = BA = 2,25.
Dans le triangle HIE rectangle en I, d'après le théorème de Pythagore :

$HE^2 = IH^2 + IE^2$
$HE^2 = 3^2 + 2{,}25^2$
$HE^2 = 9 + 5{,}0625$
$HE^2 = 14{,}0625$
$HE = \sqrt{14{,}0625}$
HE = 3,75

3. *Calculer au degré près la mesure de l'angle $\widehat{IHE}$.*

Le triangle HIE est rectangle en I,

donc : $\cos \widehat{IHE} = \dfrac{HI}{HE}$

Soit $\cos \widehat{IHE} = \dfrac{3}{3{,}75}$

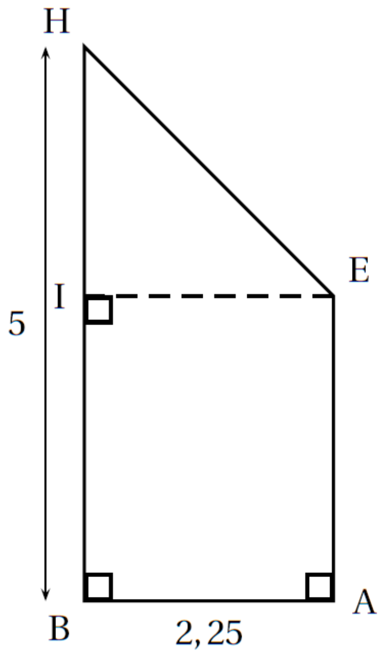
$\cos \widehat{IHE} = 0{,}8$

La calculatrice donne : $\cos^{-1} 0{,}8 \approx 37°$ (*valeur arrondie au degré prés*)
d'où **$\widehat{IHE} \approx 37°$** (*valeur arrondie au degré prés*)

Partie 2

Dans cette partie, on suppose que $\widehat{IHE}$ = 45° et on désire déterminer AE.

1. *Quelle est la nature du triangle HIE dans ce cas ?*
Justifier.



HIE est un triangle rectangle en I avec $\widehat{IHE}$ = 45°. Puisque les angles aigus dans un triangle rectangle sont complémentaires, alors on a :
$\widehat{IHE} = \widehat{IEH} = 45°$
Cela prouve que le triangle rectangle HIE est isocèle en I.
HIE est un triangle rectangle et isocèle en I.

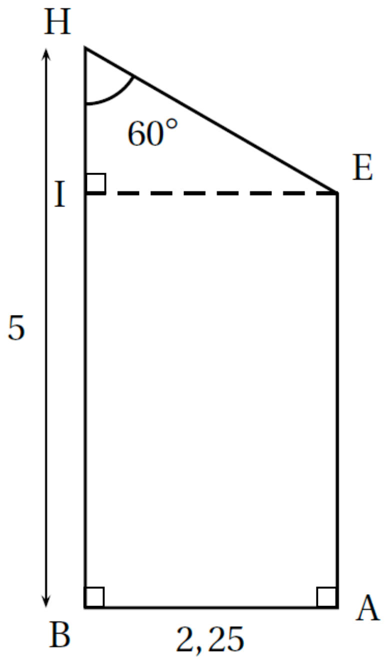
2. *En déduire HI, puis AE.*

HIE est isocèle en I, donc HI = IE.
Par conséquent **HI = 2,25**
Comme le point I est un point du segment [HB], on a : IB = HB – HI.
Donc : IB = 5 – 2,25 <u>IB = 2,75</u>
Et donc **AE = 2,75** (*car IB = AE du fait que ABIE est un rectangle*)

Partie 3

Dans cette partie, on suppose que $\widehat{IHE}$ *= 60° et on désire déterminer AE.*

1. *Déterminer la valeur arrondie au cm de HI.*



Dans le triangle HIE rectangle en I, on a : $\tan \widehat{IHE} = \dfrac{IE}{IH}$

$$\tan 60° = \frac{2,25}{IH}$$

$$IH \times \tan 60° = 2,25$$

$$IH = \frac{2,25}{\tan 60°}$$

IH ≈ 1,30

2. *En déduire la valeur arrondie au cm de AE.*

Comme le point I est un point du segment [HB], on a : IB = HB – IH.
Donc : IB = 5 – 1,30 <u>IB = 3,70</u>
d'où **AE = 3,70** (*car IB = AE du fait que ABIE est un rectangle*)

Partie 4

M. Durand souhaite que la hauteur AE soit comprise entre 3 m et 3,5 m.
En utilisant le graphique, donner une mesure possible de l'angle $\widehat{IHE}$*.*
On indiquera sur le graphique les traits de nécessaires.

50° est une mesure possible de $\widehat{IHE}$,
quand la hauteur AE est comprise entre 3 m et 3,5 m.

La courbe ci-dessous représente la hauteur AE en fonction de la mesure de l'angle $\widehat{IHE}$.